

Dany-Jack Mercier

**L'Epreuve d'exposé
au CAPES mathématiques**

Leçons rédigées et commentées

Volume III

Publibook

Retrouvez notre catalogue sur le site des Éditions Publibook :

<http://www.publibook.com>

Ce texte publié par les Éditions Publibook est protégé par les lois et traités internationaux relatifs aux droits d'auteur. Son impression sur papier est strictement réservée à l'acquéreur et limitée à son usage personnel. Toute autre reproduction ou copie, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon et serait passible des sanctions prévues par les textes susvisés et notamment le Code français de la propriété intellectuelle et les conventions internationales en vigueur sur la protection des droits d'auteur.

Éditions Publibook
14, rue des Volontaires
75015 PARIS – France
Tél. : +33 (0)1 53 69 65 55

IDDN.FR.010.0107421.000.R.P.2006.035.40000

Cet ouvrage a fait l'objet d'une première publication aux Éditions Publibook en 2006

Table des matières

0.1	Avant-propos	12
1	PGCD de deux entiers	17
1.1	Exposé-type	17
1.1.1	Introduction	17
1.1.2	Théorème fondamental et définition	18
1.1.3	Calculs pratiques	20
1.1.4	Propriétés	21
1.1.5	Nombres premiers entre eux	21
1.1.6	Applications	23
1.1.7	Remarques finales	24
1.2	Compléments	25
1.2.1	PPCM de deux entiers naturels	25
1.2.2	Utilisons le rétroprojecteur !	27
1.2.3	Qui était Bezout ?	29
1.2.4	Program or not ?	29
1.2.5	Questions du jury	32
1.2.6	Sur une question du jury posée en juin 2004	38
1.3	Approfondissements	41
1.3.1	Irrationalité de $\sqrt{2}$ et des autres	41
1.3.2	Racines évidentes d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$	45
1.3.3	Nombres de Catalan	46
1.3.4	D'autres résultats	47
1.3.5	Longueur de l'algorithme d'Euclide	51
1.3.6	A l'aide des idéaux de \mathbb{Z}	53
2	Anneau des entiers relatifs	59
2.1	Exposé-type	59
2.1.1	Divisibilité dans \mathbb{Z}	60
2.1.2	Sous-groupes et idéaux de \mathbb{Z}	61
2.1.3	Théorème de Bezout	62

2.1.4	Equation diophantienne $ax + by = c$	64
2.2	Compléments	65
2.2.1	Questions du jury	65
2.2.2	Sur l'algorithme d'Euclide étendu de la Section 2.1.4 . .	70
2.2.3	Relation avec la géométrie	72
2.3	Approfondissements	73
2.3.1	Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$	73
2.3.2	Triplets pythagoriciens	74
2.3.3	Preuve du Théorème 32 par la méthode de Diophante .	76
2.3.4	La descente infinie de Fermat	80
2.3.5	Quelques exercices utilisant la résolution de $ax + by = c$	84
2.3.6	Puissance n -ième dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	88
2.3.7	Deux problèmes de chiffrement	89
3	Fonction $z \mapsto (z - a)/(z - b)$	95
3.1	Exposé-type	95
3.1.1	Premiers résultats	96
3.1.2	Conservation des cercles-droites	97
3.1.3	Lignes de niveau	99
3.1.4	Applications	100
3.2	Compléments	102
3.2.1	Existe-t-il d'autres développements possibles?	102
3.2.2	Questions du jury	104
3.2.3	Construction géométrique de l'image d'un point par f .	111
3.2.4	Amélioration du Théorème 47	113
3.3	Approfondissements	114
3.3.1	Inversion	114
3.3.2	Equation complexe d'une droite, d'un cercle	117
3.3.3	Homographies	120
3.3.4	Topologie sur le plan anallagmatique	122
3.3.5	Homographie comme composée de transformations . . .	124
3.3.6	Groupe circulaire	124
4	Droites et plans	127
4.1	Exposé-type	127
4.1.1	Droites	128
4.1.2	Plans	130
4.1.3	Positions relatives	132
4.1.4	Faisceaux de plans	135
4.2	Compléments	136
4.2.1	Questions du jury	136

4.2.2	Equation cartésienne d'un plan	140
4.2.3	Compléments sur la Section 4.1.3	142
4.2.4	Et les raisonnements analytiques?	146
4.2.5	Points coplanaires	147
4.2.6	Droites et plans orthogonaux	148
4.3	Approfondissements	148
4.3.1	Preuve du Théorème 68 utilisant des systèmes linéaires	148
4.3.2	Preuve du Théorème 68 utilisant des déterminants . . .	149
4.3.3	Programmation linéaire dans l'espace en terminale ES .	149
5	Barycentre	153
5.1	Exposé-type	153
5.1.1	Définitions	153
5.1.2	Propriétés	155
5.1.3	Applications	158
5.2	Compléments	160
5.2.1	Questions du jury	160
5.2.2	Coordonnées barycentriques	165
5.2.3	Lecture de barycentres.	166
5.2.4	Usage de tableaux	166
5.2.5	Théorèmes de Ceva et Gergonne	171
5.2.6	Régionnement du plan par trois droites	173
5.2.7	Barycentres et aires	175
5.2.8	Une jolie figure	180
6	Cocyclicité	181
6.1	Exposé type	181
6.1.1	Théorème de l'angle inscrit	182
6.1.2	Cocyclicité	183
6.1.3	Applications	184
6.2	Compléments	188
6.2.1	Questions du jury	188
6.2.2	Lieu des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = a (2\pi)$	190
6.2.3	Une approche analytique	192
6.2.4	Traces des bissectrices d'un triangle sur le cercle circonscrit	193
6.3	Approfondissements	194
6.3.1	Coordonnées polaires	194
6.3.2	Droite de Simson	195
6.3.3	Point de Miquel d'un quadrilatère complet	196
6.3.4	Un joli alignement	198

6.3.5	Bissectrices du triangle orthique.	199
6.3.6	Point de concours des hauteurs d'un triangle	201
6.3.7	Avec des projetés orthogonaux	201
6.3.8	Points du cercle circonscrit à un triangle équilatéral	202
6.3.9	Six points d'une même ellipse	204
7	Droites remarquables dans le triangle	207
7.1	Exposé-type	207
7.1.1	Médiatrices	208
7.1.2	Médianes	209
7.1.3	Hauteurs	209
7.1.4	Bissectrices	210
7.2	Compléments	214
7.2.1	Questions du jury	214
7.2.2	Concours des médianes : preuves alternatives	221
7.2.3	Concours des hauteurs : preuves alternatives	223
7.2.4	Un exercice d'application dans l'espace	225
7.3	Approfondissements	225
7.3.1	Affixes de O, G, H et cercle des neufs points	225
7.3.2	Coordonnées barycentriques de G, I, O, H	230
8	Bissectrices	233
8.1	Exposé-type	233
8.1.1	Bissectrices	233
8.1.2	Propriétés caractéristiques	236
8.1.3	Tangentes à un cercle	237
8.1.4	Cercle inscrit dans un triangle	238
8.2	Compléments	240
8.2.1	Questions du jury	240
8.2.2	Compte rendu d'un oral de CAPES interne	250
8.2.3	Pieds des bissectrices et division harmonique	253
8.2.4	Centre du cercle inscrit et distances	256
8.2.5	Questions décalées	257
8.3	Approfondissements	264
8.3.1	Cercles exinscrits	264
8.3.2	Centre du cercle inscrit à l'écrit du CAPES 1996	265
8.3.3	Tangentes communes à deux cercles	267

9	Groupe du polygone régulier	269
9.1	Exposé-type	269
9.1.1	Polygones	270
9.1.2	Groupe d'un polygone régulier	273
9.1.3	Remarques et conclusion	275
9.2	Compléments	278
9.2.1	Sur la définition d'un polygone	278
9.2.2	Questions du jury	279
9.3	Approfondissements	285
9.3.1	Utilisation des matrices	285
9.3.2	Utilisation des complexes	286
9.3.3	Etoiles construites sur les sommets d'un polygone	287
9.3.4	Un exercice sur le groupe diédral	289
10	Paraboles	293
10.1	Exposé-type	293
10.1.1	Définition géométrique	293
10.1.2	Définition algébrique	295
10.1.3	Propriété fondamentale de la parabole	296
10.1.4	Conséquences	297
10.1.5	Exercices	298
10.2	Compléments	298
10.2.1	Existence d'un centre de symétrie	298
10.2.2	Correction des exercices de la Section 10.1.5	299
10.2.3	Questions du jury	300
10.3	Approfondissement	306
10.3.1	Intersection d'une droite et d'une parabole	306
11	Paramétrisation des coniques	309
11.1	Exposé-type	309
11.1.1	Parabole	309
11.1.2	Ellipse	312
11.1.3	Hyperbole	314
11.2	Compléments	316
11.2.1	Questions du jury	316
11.2.2	D'autres paramétrisations	318
11.2.3	Des Théorèmes plus généraux...	320
11.3	Approfondissements	323
11.3.1	Une méthode générale de paramétrisation	323

12 Fonctions logarithmes	327
12.1 Exposé-type	327
12.1.1 Introduction	328
12.1.2 Fonction logarithme népérien	328
12.1.3 Fonctions logarithmes en base a	331
12.1.4 Quelques applications	333
12.2 Compléments	334
12.2.1 Questions du jury	334
12.2.2 Que dit le programme de terminale S?	337
12.2.3 Sur les fonctions hyperboliques réciproques	339
12.2.4 Sur l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$	340
12.3 Approfondissements	341
12.3.1 Développement de $\ln(1+x)$	341
12.3.2 Constante d'Euler γ	347
12.3.3 Approximation de e	350
13 Fonctions exponentielles	353
13.1 Exposé-type	353
13.1.1 Fonction exponentielle de base e	354
13.1.2 Fonctions exponentielles de base a ($a > 0$)	356
13.1.3 Deux caractérisations de la fonction e^x	358
13.2 Compléments	359
13.2.1 Questions du jury	359
13.2.2 Notre choix d'exposition et le programme de TS	360
13.2.3 Présentation de e^x via l'équation différentielle $y' = y$	363
13.2.4 Le théorème des fonctions réciproques	373
13.2.5 Autres caractérisations des fonctions exponentielles	373
13.3 Approfondissements	376
13.3.1 La spirale admirable	376
13.3.2 Polynômes et fonction exponentielle	383
13.3.3 Utilisation du Théorème du point fixe	384
13.4 Applications aux sciences expérimentales	388
13.4.1 Radioactivité (Physique nucléaire)	388
13.4.2 Bobine à induction dans un circuit électrique	389
13.4.3 Chute d'un corps avec frottements (Mécanique)	390
13.4.4 Loi de refroidissement de Newton (Physique)	392
13.4.5 Evolution des concentrations (Physique, chimie)	393
13.4.6 Evolution d'une population (Biologie, sociologie)	396
13.4.7 Elimination d'un médicament (Biologie)	397

14 Equation $f(x + y) = f(x) \times f(y)$	399
14.1 Exposé-type I	399
14.1.1 Fonctions exponentielles de base a	399
14.1.2 Caractérisation fonctionnelle	400
14.1.3 Applications	401
14.2 Exposé-type II	402
14.2.1 Analyse	403
14.2.2 Synthèse	405
14.2.3 Applications	405
14.3 Compléments	408
14.3.1 Quelques conseils généraux	408
14.3.2 Exposants rationnels	409
14.4 Approfondissements	414
14.4.1 Cas où f est monotone	414
14.4.2 Equation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$	415
15 Fonctions puissances	419
15.1 Définition	419
15.2 Propriétés	420
15.3 Une caractérisation possible	422
15.4 Equation fonctionnelle	424
16 Méthode du pivot de Gauss	429
16.1 Méthode du pivot de Gauss	430
16.1.1 Opérations élémentaires sur les lignes	430
16.1.2 Méthode du pivot de Gauss	430
16.1.3 Exemples	431
16.2 Compléments	433
16.2.1 Intérêt de la méthode du pivot ?	433
16.2.2 Un autre exemple	436
16.2.3 Une question posée à l'oral : des lapins et des oies...	436
16.2.4 Un compte rendu d'oral à l'interne 2006	438
16.3 Approfondissements	439
16.3.1 Opérations élémentaires et inversion d'une matrice	439
17 Annexes	443
17.1 Liste des leçons 2006	443
17.2 Extrait du Rapport du Jury 2005	448
17.3 Trois problèmes sur les anneaux	453
17.3.1 Idéaux premiers et maximaux	453
17.3.2 Idéaux d'un anneau quotient	456

17.3.3	Equation $x^2 + 2 = y^3$ dans \mathbb{Z}	458
17.4	Théorème de Pick	463
17.4.1	Polygones simples	463
17.4.2	Le résultat et sa démonstration	465
17.5	Les projections cylindriques	470
17.5.1	Généralités	470
17.5.2	Les projections cylindriques	472
17.5.3	La projection cylindrique de Lambert	475
17.5.4	D'autres représentations du globe	478