

Définition des fonctions trigonométriques à partir d'une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$

Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159, France
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

6 avril 2002

Introduction

Ce travail était à l'origine une aide à la création d'une leçon de CAPES externe dont le titre exacte était : "Etude de l'application qui, à tout réel x , associe $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$. Application à une définition des fonctions trigonométriques" (leçon n° 91 de la session 2000). Ce thème permet encore de s'entraîner et de mettre en oeuvre des résultats fondamentaux concernant les propriétés des fonctions définies à l'aide d'une intégrale. Il servira donc à la préparation tant de l'écrit que de l'oral du concours.

Prérequis

- Etude générale des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On connaît en particulier l'existence d'une limite à droite et à gauche pour toute fonction monotone.
- Existence de la primitive d'une fonction continue sur un intervalle, intégrale d'une fonction continue, propriétés de l'intégrale.
- Théorème d'existence et propriétés de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone définie sur un intervalle réel et à valeurs réelles. Dérivabilité.

1 Fonction $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

Théorème 1 *L'application*

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

⁰[cfon0002] v1.00 <http://perso.wanadoo.fr/megamaths>

© 2002, D.-J. Mercier. Vous pouvez faire une copie de ces notes pour votre usage personnel.

est définie sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} et de dérivée $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Elle est strictement croissante sur \mathbb{R} , impaire, et strictement positive sur \mathbb{R}_+^* . Elle est bornée et de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Preuve : L'application $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est définie et continue sur tout \mathbb{R} , donc intégrable sur tout intervalle $[0, x]$ où $x \in \mathbb{R}$. L'application F est donc bien définie. Comme f est continue, un Théorème classique montre que F est dérivable sur \mathbb{R} et de dérivée $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. En particulier F sera strictement croissante sur \mathbb{R} et strictement positive sur \mathbb{R}_+^* . La fonction F est impaire puisque sa dérivée f est paire. Pour terminer F est bornée sur \mathbb{R} puisque

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 dt + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 2 - \frac{1}{x} \leq 2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme F est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , il en sera de même de F . ■

Remarques : On aurait pu vérifier la stricte positivité de F sur \mathbb{R}_+^* en intégrant les deux membres de l'inégalité $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$ sur $[0, x]$ où $x \geq 0$. On aurait aussi pu vérifier que F est croissante en écrivant

$$a < b \in \mathbb{R} \implies F(b) - F(a) = \int_a^b \frac{1}{1+t^2} dt > 0$$

Enfin, on aurait pu vérifier que F est impaire en effectuant le changement de variable $u = -t$. En effet

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{-1}{1+u^2} du = -F(x)$$

La fonction F est croissante et majorée par 2, donc admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$, et l'on sait que $l = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x) = \int_0^+ \frac{1}{1+t^2} dt$. On peut donc définir :

Définition 1 On pose $\pi := 2l = 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x)$.

Avec cette définition de π :

Théorème 2 F est une bijection de \mathbb{R} sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Définition 2 On note $F(x) = \arctan x$ et on dit que F est la fonction **arc tangente**.

Remarques : 1) Le nombre π est défini ici à l'aide d'une borne supérieure sans que l'on ait eu besoin d'introduire un cercle. Mais il s'agit bien du célèbre coefficient de proportionnalité entre le périmètre d'un cercle et son diamètre. Pour le vérifier, de façon approchée, il suffit de calculer une valeur approchée de $2l$ soit en utilisant la limite $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, soit en utilisant la remarque suivante.

2) On a $l = 2F(1)$ donc $\pi = 4F(1)$, ce qui permet de ramener le calcul approché de la constante π à celui d'une intégrale (cf. Section 4.2). En effet

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

et par le changement de variable $t = \frac{1}{u}$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+u^2} du = F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc $F(x) = 2F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)$ et puisque F est continue en 0, on obtient

$$l := \lim_{x \rightarrow +} F(x) = 2F(1)$$

3) La remarque 2) précédente permet d'écrire $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

2 Fonction tangente

Définition 3 On appelle fonction **tangente**, et l'on note \tan , la fonction π -périodique définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ dont la restriction à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ coïncide avec la fonction réciproque de F .

Théorème 3 La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection continue, strictement croissante, impaire, dérivable de dérivée $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$.

Preuve : On applique le Théorème de la fonction réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone définie sur un intervalle réel et à valeurs réelles.

Comme $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ne s'annule jamais, \tan sera dérivable en tout point x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et

$$(\tan)'(x) = \frac{1}{F'(\tan(x))} = \frac{1}{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}} = 1 + \tan^2 x \quad \blacksquare$$

On dessinera ici les allures des graphes de F et de la fonction tangente.

3 Fonctions cosinus et sinus

Définition 4 Les fonctions **cosinus** et **sinus** sont respectivement :

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ (-1)^k & \text{si } x = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 4 Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques, de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos x)' = -\sin x$ et $(\sin x)' = \cos x$

Preuve : ► Vérifions que la fonction cosinus est 2π -périodique. Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, la π -périodicité de la fonction tangente permet d'écrire

$$\cos(x + 2\pi) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2} + \pi\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \pi\right)} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \cos x$$

Si $x = k\pi$, on constate que $\cos(k\pi + 2\pi) = (-1)^{k+2} = (-1)^k = \cos(k\pi)$. Le cas de la fonction sinus se traite de la même manière.

► Montrons que la fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} et que $(\cos x)' = -\sin x$. Compte tenu de la périodicité, il suffit de vérifier qu'elle est dérivable sur $]0, \pi[$. La dérivabilité sur $]0, \pi[$ ne pose aucun problème puisque permet l'application des Théorèmes généraux. On obtient alors

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \frac{(-2 \tan \frac{x}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) \frac{1}{2}) (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) - (1 - \tan^2 \frac{x}{2}) (2 \tan \frac{x}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) \frac{1}{2})}{(1 + \tan^2 \frac{x}{2})^2} \\ &= \frac{-2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = -\sin x \end{aligned}$$

Pour montrer que la fonction cosinus est dérivable en 0 et de nombre dérivée 0, il suffit de vérifier qu'elle est continue en 0 et que la limite de la fonction dérivée $(\cos x)'$ existe quand x tend vers 0 en restant distinct de 0. La continuité de \cos en 0 est donnée par

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} (\cos x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right) = 1 = \cos 0$$

et l'on a bien

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} ((\cos x)') = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{-2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right) = 0.$$

Donc $\cos x$ est dérivable en 0 et $(\cos x)'_{x=0} = 0 = -\sin 0$.

La dérivabilité de $\cos x$ en π se montre de la même manière :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x \neq \pi}} (\cos x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x \neq \pi}} \left(\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right) = -1 = \cos \pi$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x \neq \pi}} ((\cos x)') = \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x \neq \pi}} \left(\frac{-2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right) = 0.$$

► On montrerait, comme ci-dessus, que la fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} et de fonction dérivée $\cos x$.

► La continuité des fonctions \sin et \cos et les résultats précédents montrent que ces fonctions sont de classe C^1 sur \mathbb{R} . ■

Remarque : Les tableaux de variation - et donc les graphes - des fonctions cosinus et sinus se déduisent du Théorème. Par exemple :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$(\cos x)$	0	$+$	$+$	0	$-$
$\cos x$	-1	0	1	0	0

Ces tableaux montrent aussi que $[-1 \ 1] = \text{Im cos} = \text{Im sin}$.

Théorème 5 On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout réel x .

Preuve : (1) : Si $x \in \pi\mathbb{Z}$,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right)^2 + \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right)^2 = 1$$

et la formule est triviale si $x \in \pi\mathbb{Z}$. ■

Remarque : Le Théorème précédent et la connaissance des variations des fonctions cosinus et sinus permettent de montrer que l'application $f : t \mapsto (\cos t \ \sin t)$ est une paramétrisation régulière du cercle trigonométrique \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans un repère orthonormal. Le demi-périmètre de \mathcal{C} sera donc

$$\frac{p}{2} = \int_0^\pi \|f'(t)\| dt = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

On retrouve la définition géométrique du nombre π .

4 Applications à la trigonométrie

4.1 Formule $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = (\text{Sgn } x) \frac{\pi}{2}$

La fonction $h(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est constante sur chacun des intervalles \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* puisque dérivable et de dérivée nulle. Cette constante est donnée par $h(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2}$ suivant le cas.

Cette formule permet de ramener le calcul de π à celui d'une intégrale généralisée, en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_x^1 \frac{1}{1+(\frac{1}{u})^2} \left(-\frac{1}{u^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

4.2 Calcul de π par un calcul approché d'intégrale

Cette méthode a été étudiée dans une épreuve écrite du CAPES interne 1995. On a

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \frac{\pi}{4} = \arctan 1 \quad \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

Comme

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

on déduit

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

On vérifie l'inégalité $\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$, et l'on obtient

$$\arctan x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

pour tout x tel que $x \leq 1$. En conclusion

$$\pi = 4 \arctan 1 = 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$$

et on connaît une majoration de l'erreur :

$$0 \leq \pi - 4 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right] \leq \frac{4}{2n+3}$$

4.3 Obtention d'inégalités

1. Si $x > 0$,

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x dt = x \quad x \leq \tan x$$

2. Si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{2t^2} dt &\leq \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_1^x \frac{1}{2} dt \\ \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x &\leq \arctan x - \arctan 1 \leq \frac{x-1}{2} \\ \frac{x-1}{2x} &\leq \arctan x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$

donc

$$0 < \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2x} \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$$

Si $\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si $x < 1 + \frac{\pi}{2}$, tous les réels figurant dans les inégalités ci-dessus sont dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Comme la fonction tangente est croissante sur cet intervalle, on déduit

$$x \in \left[1 + \frac{\pi}{2}, \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2x} \right) \right] \leq x \leq \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} \right)$$

ce qui peut encore s'écrire

$$x \in \left[1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right] \left[\frac{1 + \tan\left(\frac{x-1}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x-1}{2}\right)} \leq x \leq \frac{1 + \tan\left(\frac{x-1}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x-1}{2}\right)} \right]$$

3. Inégalités pouvant être aussi obtenues à l'aide du Théorème des accroissements finis. Si $0 \leq a \leq b$,

$$\frac{1}{1+b^2} (b-a) \leq \int_a^b \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{1+a^2} (b-a)$$

Comme $\int_a^b \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^b \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^a \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan b - \arctan a$, on déduit

$$\frac{1}{1+b^2} (b-a) \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{1}{1+a^2} (b-a)$$

Pour $a = 0$, on obtient en particulier

$$b \geq 0 \quad \frac{b}{1+b^2} \leq \arctan b \leq b$$

Comme $\tan x$ est croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on déduit aussi

$$b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \left[\tan\left(\frac{b}{1+b^2}\right) \leq b \leq \tan b \right]$$

5 Annexe : Autre façon de définir les fonctions cosinus et sinus

On peut préférer échanger la Section 3 pour le développement suivant.

5.1 Fonction cosinus

Définition 5 L'application $g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ périodique de période 2π définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\tan^2 x} & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{-1}{1+\tan^2 x} & \text{si } x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\\ 0 & \text{si } x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$

est appelée fonction **cosinus**, et on note $g(x) = \cos x$.

Théorème 6 La fonction cosinus est 2π -périodique, paire, dérivable sur \mathbb{R} et

$$\cos'(x) = \begin{cases} \frac{-\tan x}{1+\tan^2 x} & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} & \text{si } x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\\ \pm 1 & \text{si } x = \mp \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Preuve : Vérifions seulement que $g(x) := \cos x$ est dérivable sur tout \mathbb{R} . Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ est dérivable et

$$g'(x) = -\frac{1}{2} (1 + \tan^2 x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(\tan x) (1 + \tan^2 x) = \frac{-\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

De la même façon $g'(x) = \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ existe pour tout $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. L'application g est continue en $\frac{\pi}{2}$ car $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = 0$. On démontrerait de même la continuité en $-\frac{\pi}{2}$. Par périodicité, on déduit que g est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\tan x}{1 + \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\tan x}{\tan x \left(\frac{1}{\tan^2 x} + 1 \right)} = -1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\tan x \left(\frac{1}{\tan^2 x} + 1 \right)} = -1$$

on constate que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g'(x) = -1$. Ces limites égales, alliées au fait que g est continue sur tout \mathbb{R} , assurent la dérivabilité de g en $\frac{\pi}{2}$ avec $g'(\frac{\pi}{2}) = -1$. La dérivabilité en $-\frac{\pi}{2}$ se traite de la même façon, et les dérivabilités en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ se déduisent des résultats en $\pm\frac{\pi}{2}$ et de la périodicité de g . ■

Remarque : Le tableau de variation - et donc le graphe - de la fonction cosinus se déduisent du Théorème :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	1	0	-1	0	

5.2 Fonction sinus

Définition 6 La fonction **sinus**, notée \sin , est définie sur tout \mathbb{R} par $\sin x = -\cos(x)$.

Théorème 7 La fonction sinus est impaire, 2π -périodique, continue, dérivable sur \mathbb{R} et

$$x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (*)$$

Preuve : La fonction cosinus est paire donc sa fonction dérivée sera impaire, et $x \rightarrow \sin x$ aussi. Le Théorème 6 donne

$$\sin x = \begin{cases} \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{-\tan x}{1+\tan^2 x} & \text{si } x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\\ \pm 1 & \text{si } x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Avec ces écritures explicites de $\sin x$ en fonction de $\tan x$, on peut vérifier la continuité et la dérivabilité de $\sin x$ comme au Théorème 6. Quant à la formule (*), vérifions là seulement lorsque $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \sin x &= \left(\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} \left((1 + \tan^2 x) \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} - \tan x \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{2 (1 + \tan^2 x)} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos x \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque : Le tableau de variation et le graphe de $\sin x$ se déduisent de la formule (*).

Théorème 8 On a

- (1) $x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- (2) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- (3) $x \in \mathbb{R} \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- (4) $x \in \mathbb{R} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Preuve : On montre (1) et (2) en faisant trois cas suivant que x appartienne à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, à $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ ou à $\{\pm\frac{\pi}{2}\}$. Par exemple, si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{1}{1 + \tan^2 x} \right)^2 + \left(\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \right)^2 = 1$$

et

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}}{\frac{1}{1 + \tan^2 x}} = \tan x$$

Les formules (3), (4) et les formules donnant $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ s'obtiennent de la même façon mais en envisageant un plus grand nombre de cas. \blacksquare