Capes 1988, épreuve I

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante : **jeaneric.richard(a)wanadoo.fr** (changer (a) en @). Bon courage ! Version du 18 janvier 2009 à 16h26.

Notations et objectifs du problème

On note (u_p) la suite définie pour tout entier $p \geqslant 1$ par la relation

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{1}$$

La somme γ de la série de terme général u_p s'appelle la constante d'Euler et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\gamma_n = \sum_{p=1}^{p=n} u_p \qquad \text{et} \qquad r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p. \tag{2}$$

On désigne par S et R les fonction s définies respectivement sur $]-\infty\,;-\infty[$ et sur $]0\,;+\infty[$ par les relations

$$\mathrm{S}(x) = \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Enfin On note Γ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Dans la partie I, on étudie la convergence de la série et des intégrales précédentes, on établit une expression intégrale de γ à l'aide des fonctions S et R, et on relie γ à la valeur de la dérivée Γ' de Γ au point 1.
la partie II décrit un procédé d'approximation de γ par accélération de convergence de la suite (γ_n).
La partie III décrit un autre procédé d'approximation de γ, fondé sur une développement de S en série entière et sur un développement asymptotique de R.

I. Définition et expressions intégrales de la constante d'Euler

1. Convergence de la série définissant γ.

a. Prouver que, pour tout $p \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Établir que (γ_n) est une suite croissante, que cette suite converge et que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

b. Établir que, pour tout $p \geqslant 1$,

$$u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{p+u}\,\mathrm{d}u. \tag{5}$$

En déduire que, pour tout $p \geqslant 2$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

et que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

c. On approche γ par γ_n. déterminer un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2} ; même question pour le précision 10^{-8}.(On ne demande pas d'effectuer le calcul de γ_n.)

d. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\gamma_{n,\,1} = \gamma_n + \frac{1}{2(n+1)}.$$

Prouver que $0 \leqslant \gamma - \gamma_{n,\,1} \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

e. Reprendre la question **??** lorsqu'on approche γ par $\gamma_{n,\,1}$; déterminer une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-2}.

2. Expression intégrale de γ à l'aide de S et R.

a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \quad \text{si } t \neq 1 \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Établir la convergence des intégrales (**??**) et prouver que S et R sont de classe C^1 respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $]0\,;+\infty[$.

c. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\,\mathrm{d}v.$$

Á cet effet, on pourra calculer la somme

$$1 + (1-v) + \cdots + (1-v)^{n-1}.$$

d. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}\,\mathrm{d} - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

où e_n est la fonction définie sur $[0\,;n]$ par la relation

$$e_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

e. Établir que, pour tout réel v,

$$1 + v \leqslant \mathrm{e}^v. \tag{6}$$

f. Établir que pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant e_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

$\left(\text{On pourra appliquer (\textbf{??}) en prenant } v = \dfrac{t}{n} \text{ et } v = -\dfrac{t}{n}.\right)$

En déduire que, dans les mêmes conditions

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - e_n(t) \leqslant \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}.$$

g. Montrer finalement que

$$\gamma = \mathrm{S}(1) - \mathrm{R}(1). \tag{7}$$

3. Expression de γ à l'aide de la dérivée de Γ.

a. Établir que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale (**??**) est convergente.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Γ_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par la relation

$$\Gamma_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \mathrm{e}^{-t} t^x \,\mathrm{d}t.$$

Prouver que Γ_n est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$.

c. Montrer que Γ_n converge vers Γ uniformément sur tout intervalle compact $[a\,;b]$ contenu dans $]0\,;+\infty[$.

d. Pour tout réel x, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \ln t \,\mathrm{d}t.$$

Établir la convergence de cette intégrale. Prouver que Γ est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et que $\Gamma' = F$.
En particulier

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

e. Á partir des relations (**??**) et (**??**), montrer que $\Gamma'(1) = \gamma$.

II. Approximation de γ par accélération de convergence de la suite γ_n

Pour tout entier $k \geqslant 0$, on désigne par φ_k la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par les relations :

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{t(t+1)\dots(t+k)} \quad \text{si } k \geqslant 1 \quad \text{et } \varphi_0(t) = \frac{1}{t}.$$

Enfin, pour tout entier $j \geqslant 1$, on note N_j le polynôme défini par les relations

$$N_j(X) = X(1-X)(2-X)\dots(j-1-X) \quad \text{si } j \geqslant 2 \quad \text{et} \quad N_1(X) = X.$$

1. Sommation des séries télescopiques.

On note Δ l'endomorphisme de l'espace vectoriel E des fonctions numériques f continues sur $]0\,;+\infty[$ et tendant vers 0 en $+\infty$ défini par la relation $\Delta f(x) = f(x) - f(x+1)$.

a. Soit f une élément de E. Établir le convergence de la série de terme général $\alpha_p = \Delta f(p)$. Calculer la somme de cette série et le reste à l'ordre n de cette série, c'est à dire $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \Delta f(p)$, où $n \geqslant 0$.

b. Calculer, pour tout $k \geqslant 1$, $\Delta\varphi_{k-1}$. Établir la convergence de la série de terme général $\varphi_k(p)$, où $p \geqslant 1$, et prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \varphi_k(p) = \frac{1}{k}\frac{n!}{(n+k)!}.$$

2. Accélération de convergence : premier pas.

L'idée consiste à écrire le terme général u_p de la série donnant γ, qui est équivalent à $\dfrac{1}{2p^2}$, comme somme de deux termes d'ont l'un est télescopique et l'autre est de l'ordre de $\dfrac{1}{p^3}$. Á cet effet, on part de la formule (**??**) et on approche sur $[0\,;1]$, $\dfrac{1}{p+u}$ par une constante en écrivant que

$$\frac{1}{p+u} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1}\frac{1-u}{p+u}.$$

a. Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$,

$$u_p = \frac{1}{2}\frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 \frac{\mathrm{N}_2(u)}{p+u}\,\mathrm{d}u.$$

b. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$r_n = \frac{1}{2(n+1)} + r_{n,\,1}, \qquad \text{où } 0 \leqslant r_{n,\,1} \leqslant \frac{1}{12n(n+1)}. \tag{9}$$

3. Accélération de convergence : k–ième pas.

Pour tout entier $j \geqslant 1$, on pose

$$\lambda_j = \int_0^1 \mathrm{N}_j(u)\,\mathrm{d}u.$$

a. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout entier $p \geqslant 1$,

$$u_p = \frac{\lambda_1}{p(p+1)} + \frac{\lambda_2}{p(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{\lambda_k}{p(p+1)\dots(p+k)} + \rho_{p,k},$$

$$\text{où } \rho_{n,k} = \frac{1}{p(p+1)\dots(p+k)}\int_0^1 \frac{\mathrm{N}_{k+1}(u)}{p+u}\,\mathrm{d}u.$$

b. Établir enfin que, pour tout entier $k \geqslant 1$, et tout entier $n \geqslant 1$,

$$r_n = \frac{\lambda_1}{n+1} + \frac{\lambda_2}{2(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\lambda_k}{k(n+1)(n+2)\dots(n+k)} + r_{n,k}, \tag{10}$$

$$\text{où } 0 \leqslant r_{n,k} \leqslant \frac{\lambda_{k+1}}{(k+1)(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

c. Á partir de (**??**), construire une suite $(\gamma_{n,k})$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \gamma - \gamma_{n,k} \leqslant r_{n,k}$.

4. Calcul des nombres γ_n par emploi d'une série génératrice.

a. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{(n-1)!}{6} \leqslant \lambda_{n+1} \leqslant \frac{n!}{6}.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière

$$1 + \lambda_1 x - \frac{\lambda_2}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\lambda_n}{n!}x^n + \cdots$$

Soit $\mathrm{G}(x)$ la somme de cette série.

b. Écrire le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto (1+x)^u$ où u est un réel strictement positif, et où $|x| < 1$. Prouver que, pour x fixé, on peut intégrer terme à terme par rapport à u sur l'intervalle $[0\,;1]$.
En déduire, si $x \neq 0$,

$$G(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

c. Expliciter un système triangulaire permettant de calculer les nombres λ_n par récurrence.

5. Application numérique.

On se propose d'obtenir une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-8}. On prend $k = 4$.

a. Calculer λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 et majorer λ_5.

b. Déterminer un enter n tel que $r_{n,\,4} \leqslant 7 \times 10^{-9}$.

c. n étant ainsi fixé, calculer $\gamma_{n,\,4}$ à la précision 2×10^{-9}. On précisera l'algorithme utilisé pour calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ et on justifiera que la précision demandée est effectivement obtenue.

III. Approximation de γ par développement de S en série entière

La méthode consiste à évaluer γ en fonction de $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{R}(x)$, pour x assez grand pour que $\mathrm{R}(x)$ soit petit et, x étant fixé, d'approcher $\mathrm{S}(x)$ à l'aide d'un développement en série entière.

1. Nouvelle expression intégrale de γ.

Á partir de la formule (**??**), prouver que, pour tout nombre réel $x > 0$,

$$\gamma = \mathrm{S}(x) - \mathrm{R}(x) - \ln x.$$

2. Évaluation asymptotique de $\mathrm{R}(x)$.

a. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$ et tout nombre réel x strictement positif,

$$\mathrm{R}(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{j=0}^{j=k-2} \frac{(-1)^j j!}{x^{j+1}} + \mathrm{R}_k(x) \quad \text{où} \quad \mathrm{R}_k(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^k}\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

(Lorsque $k = 1$ on convient que R_1=R.)

b. Prouver que, dans ces mêmes conditions,

$$|\mathrm{R}_k(x)| \leqslant (k-1)! \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^k} \tag{12}$$

* et que $|\mathrm{R}_k(x)|$ est équivalent à $(k-1)!\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^k}$ lorsque $x \to +\infty$.

c. Montrer que, x étant fixé, $|\mathrm{R}_k(x)| \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$.(on pourra minorer l'intégrale donnant R_k en intégrant sur $[x\,;2x]$.)
Montrer enfin que $|\mathrm{R}_k(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-(2k-1)}$.
Á cet effet, on établira que $\ln k! \leqslant (k+1)\ln k - k + 1$.

3. Approximation de $S(x)$ par développement en série entière.

a. Prouver que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout réel x,

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2 \times 2!} + \frac{x^3}{3 \times 3!} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^p}{p \times p!} + \cdots$$

b. On suppose désormais que $x \geqslant 1$, et on pose $a_p(x) = \dfrac{x^p}{p \times p!}$. Montrer que la suite $p \mapsto a_p(x)$ est décroissante à partir du rang $p = [x]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

c. Soit n un entier tel que $n \geqslant [x]$. On pose

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2 \times 2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1) \times (n-1)!}.$$

Prouver que $|S(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{x^n}{n \times n!}$, puis que $|S(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{x^n \mathrm{e}^{n-1}}{n^{n+1}}$.

4. Obtention d'une grande précision pour γ.

On se propose de décrire deux méthodes de calcul d'une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-100}.

a. On prend $k = 1$. Déterminer un nombre entier x tel que $|R(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}10^{-100}$. Ce nombre x étant ainsi fixé, déterminer un entier n tel que $|S(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}10^{-100}$.

b. On prend $k = x$. Déterminer k de telle sorte que $|R_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}10^{-100}$. Ces nombres x et k étant ainsi fixés, déterminer un entier n tel que $|S(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}10^{-100}$.

c. Les nombres k, x, n étant fixés, expliciter des algorithmes performants pour le calcul de $S(x)$ et celui de $R(x)$-$R_k(x)$. 5il n'est pas demandé d'étudier les problèmes posés par les erreurs d'arrondi.)